

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені В. Н. КАРАЗИНА

А. А. Янцевич, О. В. Дьячкова

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник  
У двох частинах

**Частина I**

*Теорія ймовірностей*

Харків – 2018

УДК 519.2 (075.8)  
Я 99

**Рецензенти:**

**В. О. Золотарьов** – доктор фіз.-мат. наук, професор, провідний науковий співробітник ФТІНТ ім. Б. І. Веркіна НАН України;

**О. О. Аршава** – канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри вищої математики ХНУБА;

**Є. В. Свищова** – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри інформаційних технологій і математики ХГУ «НУА».

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради  
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна  
(протокол № 10 від 29.10.2018 року)*

**Янцевич А. А.**

Я 99

Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник : у 2-х ч.  
Ч. 1. Теорія ймовірностей / А. А. Янцевич, О. В. Дьячкова. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2018. – 212 с.

ISBN 978-966-285-505-0

Видання призначено для студентів соціально-економічних і управлінських спеціальностей (усіх форм навчання), які вивчають базовий курс теорії ймовірностей і математичної статистики. Перша частина містить основні ймовірнісні поняття, теореми і методи. Зокрема висвітлено алгебру подій, аксіоматичну побудову теорії ймовірностей, операції з ними, випадкові величини та їхні розподіли, граничні теореми.

Викладення супроводжується прикладами з їхніми розв'язаннями, питаннями для самоконтролю, насичено багатим ілюстративним рядом – графіками, схемами, діаграмами. Відмінною рисою посібника є наявність широкого довідкового апарату: основних формул, числових таблиць, переліку комп'ютерних функцій, предметного покажчика, перекладного словника з теорії ймовірностей тощо. Це дозволяє використовувати посібник і як довідник студентам, аспірантам, викладачам, науковим співробітникам й усім бажаючим, які опановують ймовірнісні та статистичні методи.

**УДК 519.2 (075.8)**

ISBN 978-966-285-505-0

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2018

© А. А. Янцевич, О. В. Дьячкова, 2018

© О. В. Дьячкова, макет обкладинки, 2018

## КОРОТКИЙ ЗМІСТ

Вступ	7
<b>РОЗДІЛ I. ІМОВІРНІСТЬ</b>	
1. Випадкові події	11
2. Імовірність події	19
3. Додавання і множення ймовірностей	31
4. Повторні випробування	43
<b>РОЗДІЛ II. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ</b>	
5. Випадкова величина	54
6. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин	87
7. Неперервні випадкові величини	99
8. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин	113
<b>РОЗДІЛ III. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ</b>	
9. Граничні теореми теорії ймовірностей	149
<b>Додатки</b>	
Основні позначення і скорочення	170
Грецький алфавіт	171
Основні формули	172
Функції MS Excel і Mathcad	187
Таблиці значень функцій	190
Короткий словник із теорії ймовірностей	202
Список літератури	209
Предметний покажчик	210

## ЗМІСТ

<b>Вступ .....</b>	<b>7</b>
 <b>Розділ I. Імовірність</b>	
<b>Глава 1. Випадкові події.....</b>	<b>11</b>
1.1. Різновиди подій.....	12
1.2. Алгебра подій .....	14
<b>Глава 2. Імовірність події .....</b>	<b>19</b>
2.1. Статистична ймовірність .....	19
2.2. Класичне визначення ймовірності.....	20
2.3. Властивості ймовірності.....	21
2.4. Геометрична ймовірність .....	23
2.5. Аксиоматичне визначення ймовірності .....	25
<b>Глава 3. Додавання і множення ймовірностей.....</b>	<b>31</b>
3.1. Умовна ймовірність.....	31
3.2. Теорема множення ймовірностей.....	32
3.3. Імовірність появи хоча б однієї події.....	35
3.4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.....	36
3.5. Формула повної ймовірності.....	37
3.6. Формула Бейєса.....	38
<b>Глава 4. Повторні випробування .....</b>	<b>43</b>
4.1. Формула Бернуллі .....	43
4.2. Асимптотичні наближення .....	47
4.2.1. Локальна теорема Муавра – Лапласа .....	47
4.2.2. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа .....	48
4.2.3. Формула Пуассона .....	49
 <b>Розділ II. Випадкові величини</b>	
<b>Глава 5. Випадкова величина .....</b>	<b>54</b>
5.1. Поняття випадкової величини.....	54
5.2. Властивості функції розподілу ймовірностей .....	56
5.3. Класифікація випадкових величин .....	58
5.3.1. Дискретні і неперервні ВВ.....	58
5.3.2. Закон розподілу, ряд розподілу дискретної ВВ .....	58
5.3.3. Загальний вигляд функції розподілу дискретної ВВ .....	61
5.4. Система декількох випадкових величин.....	64
5.4.1. Багатовимірні випадкові величини .....	64
5.4.2. Залежні і незалежні випадкові величини .....	66
5.5. Операції над дискретними випадковими величинами .....	69

5.6. Числові характеристики дискретних випадкових величин .....	74
5.6.1. Математичне очікування.....	75
5.6.2. Властивості математичного очікування .....	76
5.6.3. Відхилення і дисперсія .....	80
5.6.4. Властивості дисперсії.....	81
5.6.5. Середнє квадратичне відхилення .....	84
<b>Глава 6. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин .....</b>	<b>87</b>
6.1. Біноміальний розподіл .....	87
6.2. Розподіл Пуассона.....	91
6.3. Геометричний розподіл.....	95
6.4. Гіпергеометричний розподіл .....	96
6.5. Дискретний рівномірний розподіл.....	97
<b>Глава 7. Неперервні випадкові величини .....</b>	<b>99</b>
7.1. Функція розподілу неперервної випадкової величини .....	99
7.2. Щільність розподілу неперервної випадкової величини .....	102
7.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин .....	106
7.3.1. Математичне очікування.....	106
7.3.2. Дисперсія, середнє квадратичне відхилення.....	107
7.3.3. Інші числові характеристики .....	108
<b>Глава 8. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин .....</b>	<b>113</b>
8.1. Рівномірний розподіл .....	113
8.2. Показовий (експоненціальний) розподіл .....	116
8.3. Нормальний розподіл.....	120
8.3.1. Крива Гаусса .....	121
8.3.2. Вплив параметрів нормального розподілу на форму кривої Гаусса.....	122
8.3.3. Характеристики нормального розподілу.....	123
8.3.4. Імовірність влучення нормальної ВВ в заданий інтервал .....	125
8.3.5. Правило трьох сигм .....	129
8.4. Розподіли, що використовуються в математичній статистиці .....	133
8.4.1. Розподіл $\chi^2$ (Пірсона).....	133
8.4.2. Розподіл Стюдента .....	135
8.4.3. Розподіл Фішера.....	137
8.4.4. Співвідношення між розподілами.....	138
8.5. Деякі розподіли, що використовуються для розв'язання прикладних задач .....	139
8.5.1. Усічений нормальний розподіл.....	139
8.5.2. Логнормальний розподіл.....	140
8.5.3. Гамма-розподіл.....	141
8.5.4. Бета-розподіл .....	141
8.5.5. Розподіл Релея .....	142
8.5.6. Розподіл Вейбулла .....	143
8.5.7. Розподіл Парето .....	143
8.5.8. Логістичний розподіл.....	144
8.5.9. Криві Пірсона.....	145

## Розділ III. Граничні теореми

<b>Глава 9. Граничні теореми теорії ймовірностей .....</b>	<b>149</b>
9.1. Закон великих чисел .....	149
9.2. Нерівності Маркова і Чебишова.....	150
9.2.1. Нерівність Маркова.....	150
9.2.2. Нерівність Чебишова .....	152
9.3. Теореми закону великих чисел.....	154
9.3.1. Теорема Маркова .....	154
9.3.2. Теорема Чебишова .....	156
9.3.3. Теорема Бернуллі .....	159
9.4. Центральна гранична теорема.....	164
9.5. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа.....	167
<b>Додатки .....</b>	<b>170</b>
Основні позначення і скорочення.....	170
Грецький алфавіт .....	171
Основні формули комбінаторики .....	172
Основні формули теорії ймовірностей .....	174
Основні розподіли випадкових величин .....	184
Функції MS Excel і Mathcad .....	187
Таблиці значень функцій.....	190
Короткий словник із теорії ймовірностей .....	202
Список літератури.....	209
Предметний покажчик.....	210